



Математическое
моделирование процесса
распространения
переходных волн в упругой
вертикально-слоистой
среде



Галаев В.Е., Рок В.Е.

V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование осадочных пород

11-15 сентября 2016 года
г. Петергоф



Широкое распространение исследований в области распространения сейсмоакустических сигналов основано на применении методов численного компьютерного моделирования требует наличия точных эталонных решений, для проверки качества получаемых результатов.

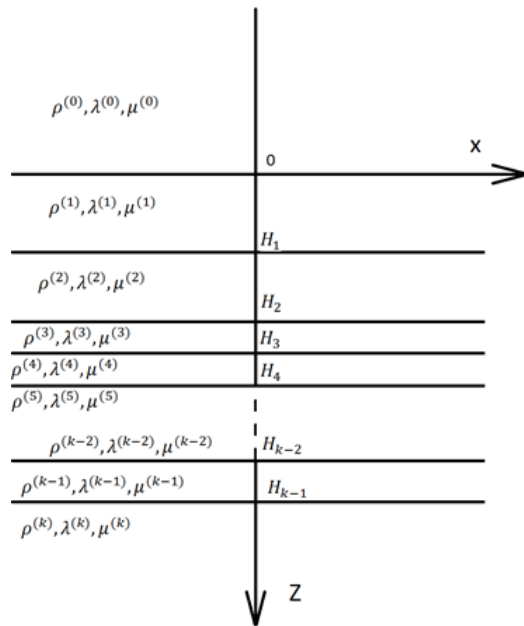
Цель работы:

1. Построение и исследование математической модели многослойной упругой среды допускающее точное решение.
2. Нахождение точного решения распространения переходных волн в рассматриваемой многослойной упругой среде. И получение рассеянного и прошедшего сейсмоакустического поля.

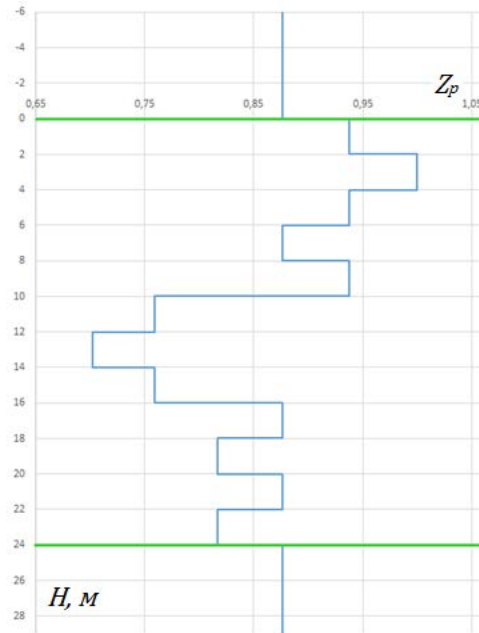


Пример геологического разреза доманикоидного коллектора

Кривая Р-импеданса



Модель исходной 14ти
слоистой среды.



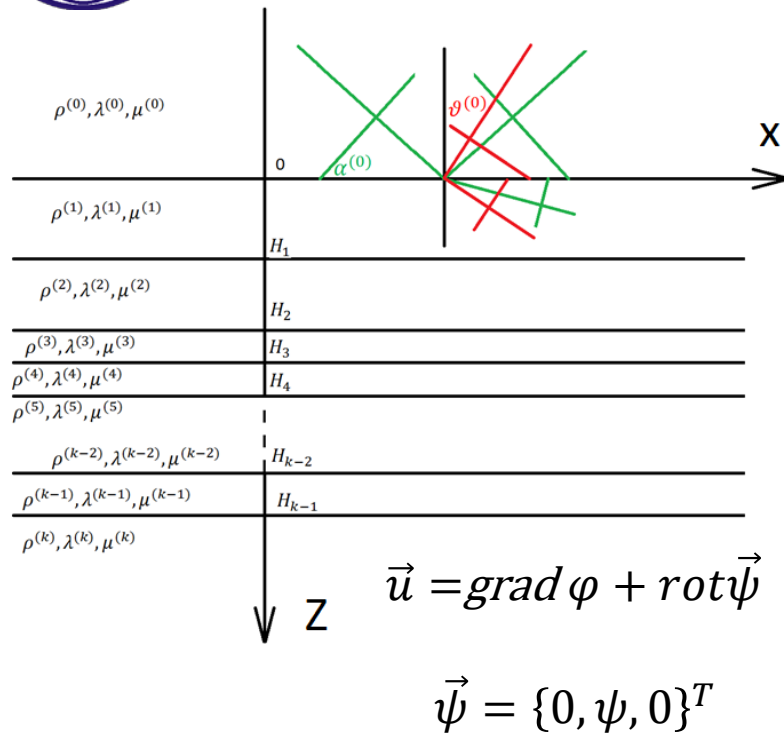
Индекс пространст ва	h, м	$\rho, \text{г/см}^3$	$c_{\parallel}, \text{км/с}$	$c_{\perp}, \text{км/с}$
0		2.55	4.80	2.88
1	0	2.60	5.04	3.02
2	2	2.65	5.28	3.17
3	4	2.60	5.04	3.02
4	6	2.55	4.80	2.88
5	8	2.60	5.04	3.02
6	10	2.45	4.32	2.60
7	12	2.40	4.08	2.45
8	14	2.45	4.32	2.60
9	16	2.55	4.80	2.88
10	18	2.50	4.56	2.74
11	20	2.55	4.8	2.88
12	22	2.50	4.56	2.74
13	24	2.55	4.8	2.88



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Постановка задачи



- i. Каждый упругий слой изотропен и однороден
- ii. Падающая продольная волна с плоским фронтом
- iii. P and SV -waves

В системе координат в которой плоскость XoZ параллельна нормали к границам и нормали к фронту

$$\frac{1}{c_{\parallel}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{c_{\perp}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta \psi$$





Источник упругих волн

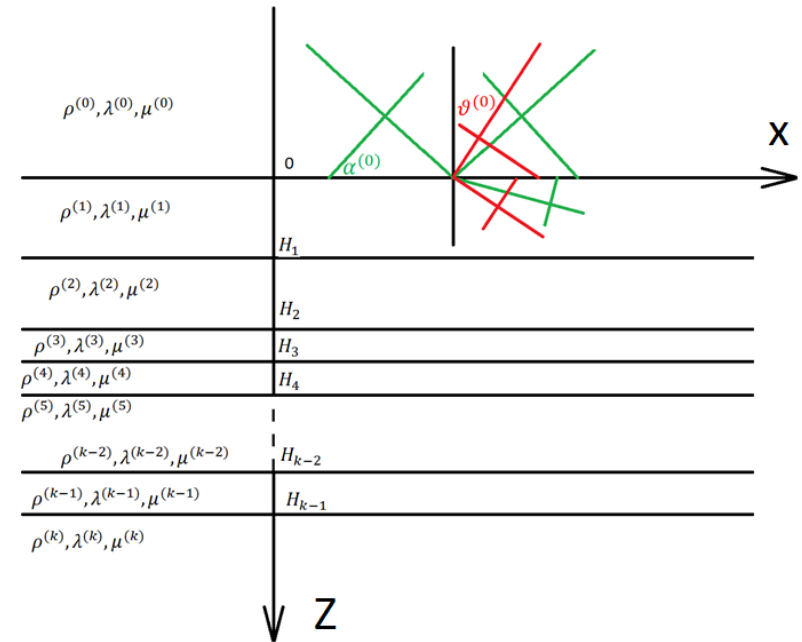
$$f\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c_{\parallel}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(c_{\parallel} t' - \vec{n} \cdot \vec{r}) f(t - t') dt'$$

Источник возбуждения
– продольная волна

$$\vec{u}_{int} = \vec{n} I \delta(c_{\parallel} t - \vec{n} \cdot \vec{r})$$

$$\vec{u}_{int} = grad \varphi_{int}$$

$$\varphi_{int} = -H(c_{\parallel} t - \vec{n} \cdot \vec{r})$$



$$0 < \sin(\alpha) < \frac{c_{\parallel}}{\max(c_{\parallel}^i)}$$

Л.А. Молотков, «Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах.», 1984.

Thomson W.T., «Transmission of elastic waves through a stratified solid material.», 1950.

Haskell N.A., «The dispersion of surface waves on multilayered media.», 1953.



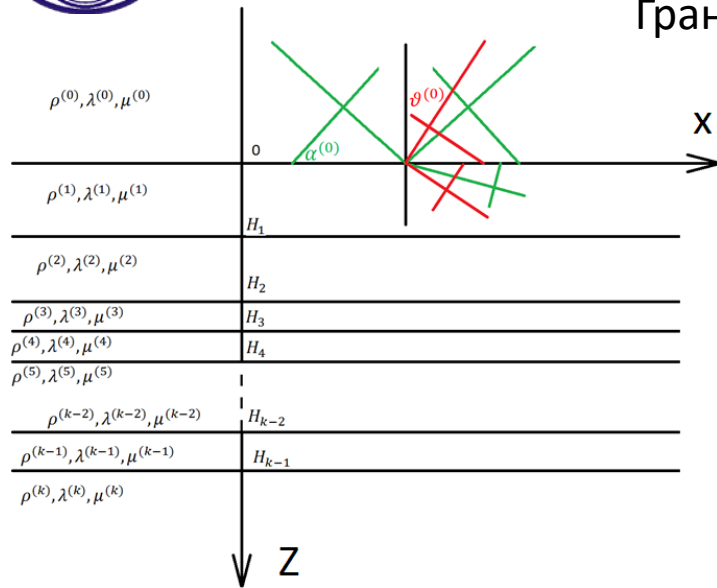
В Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Установление связей между слоями

Граничные условия в исходной системе отсчета:

$z \neq 0$



$$[u_1] \Big|_{z=h_{i-1}} = \partial_x \varphi_{i-1} - \partial_z \psi_{i-1} - \partial_x \varphi_i + \partial_z \psi_i = 0$$

$$[u_3] \Big|_{z=h_{i-1}} = \partial_z \varphi_{i-1} + \partial_x \psi_{i-1} - \partial_z \varphi_i - \partial_x \psi_i = 0$$

$$\hat{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\hat{\varepsilon}) \hat{E} + 2\mu \hat{\varepsilon}$$

Закон Гука для (i-го)
изотропного слоя

$$[\sigma_{xz}] \Big|_{z=h_{i-1}} = \mu_{i-1} [\partial_{xx} \psi_{i-1} + 2\partial_{xz} \varphi_{i-1} - \partial_{zz} \psi_{i-1}] - \mu_i [\partial_{xx} \psi_i + 2\partial_{xz} \varphi_i - \partial_{zz} \psi_i] = 0$$

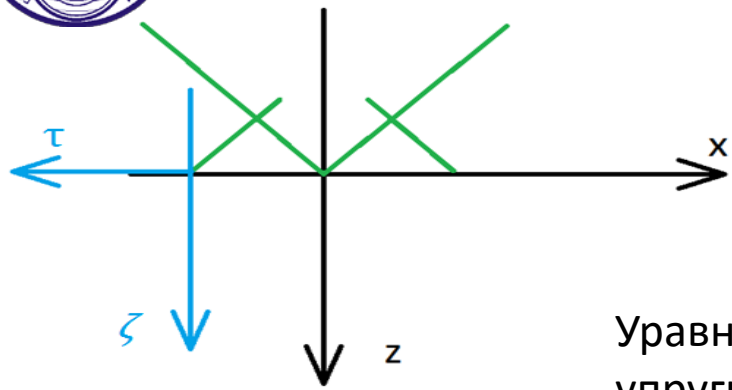
$$[\sigma_{zz}] \Big|_{z=h_{i-1}} = \lambda_{i-1} [\partial_{xx} \varphi_{i-1} + \partial_{zz} \varphi_{i-1}] + 2\mu_{i-1} [\partial_{zz} \varphi_{i-1} + \partial_{xz} \psi_{i-1}] - \\ - \lambda_i [\partial_{xx} \varphi_i + \partial_{zz} \varphi_i] - 2\mu_i [\partial_{zz} \varphi_i + \partial_{xz} \psi_i] = 0$$



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Преобразование Галилея к системе отсчета сопутствующей точке пересечения фронта волны с границей верхнего слоя



Переход к новой с.о.

$$x = -\tau + \frac{c_{\parallel} t}{\sin(\alpha)} = -\tau + vt; \quad x_3 = \zeta; \quad t = \eta;$$

$$\vec{u} = \vec{u}(c_{\parallel} t - \vec{n} \cdot \vec{r})$$

$$\forall i: c_i < v$$

$$\vec{u} = \vec{u}(\tau, \zeta)$$

Уравнения распространения
упругих возмущений в подвижной
с.о.

$$(x, z, t) \rightarrow (\tau, \zeta)$$

$$\left(\left(\frac{v}{c_{\parallel i}} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$(A_i)^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$\left(\left(\frac{v}{c_{\perp i}} \right)^2 - 1 \right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$(B_i)^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \zeta^2} = 0$$

1) $\varphi_i(.)$ и $\psi_i(.)$ не изменяются при переходе к новой с.о.

2) В новой системе отсчета: $\varphi_i = \varphi_i(\tau, \zeta)$ и $\psi_i = \psi_i(\tau, \zeta)$



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



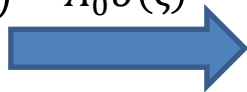
Начальные условия для потенциалов при $\tau = 0$

$$\begin{aligned} \zeta < 0 \quad \varphi_0|_{\tau=0} &= -H(-\zeta \cos(\alpha_0)) & \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= -\frac{1}{A_0} \delta(\zeta) \\ \zeta > 0 \quad \forall i > 0: \quad \varphi_i|_{\tau=0} &= 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= 0 \end{aligned}$$

Решение дифференциальных уравнений в образах Лапласа по переменной $\tau \rightarrow s$, поскольку потенциалы отличны от нуля только при $\tau > 0$ с учетом правила преобразования производных.

Верхнее полупространство $L_{\tau \rightarrow s}[f^{(n)}(\tau)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^n s^{n-k-1} f^{(k)}(0+)$

$$\begin{aligned} (A_0)^2 s^2 G_0 - \frac{\partial^2 G_0}{\partial \zeta^2} &= \\ &= -(A_0)^2 s H(-\zeta \cos(\alpha_0)) - A_0 \delta(\zeta) \end{aligned}$$



$$G_0(s, \zeta) = G_{0\text{общ}} + G_{0\text{ч}}$$

$$(B_0)^2 s^2 P_0 - \frac{\partial^2 P_0}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$P_0(s, \zeta) = P_{0\text{общ}}$$

Ниже первой границы

$$(A_i)^2 s^2 G_i - \frac{\partial^2 G_i}{\partial \zeta^2} = 0$$



$$G_i(s, \zeta) = G_{i\text{общ}}$$

$$(B_i)^2 s^2 P_i - \frac{\partial^2 P_i}{\partial \zeta^2} = 0$$

$$P_i(s, \zeta) = P_{i\text{общ}}$$

$$G_{0\text{общ}} = G_0^-(s, \zeta) = g_0^-(s) e^{s\zeta A_0}$$

$$P_{0\text{общ}} = P_0^-(s, \zeta) = p_0^-(s) e^{s\zeta B_0}$$

$$G_{0\text{ч}} = \frac{1}{s}$$

$$G_i(s, \zeta) = g_i^-(s) e^{s\zeta A_i} + g_i^+(s) e^{-s\zeta A_i}$$

$$P_i(s, \zeta) = p_i^-(s) e^{-s\zeta B_i} + p_i^+(s) e^{-s\zeta B_i}$$

$$G_k(s, \zeta) = g_k^+(s) e^{-s\zeta A_k}$$

$$P_k(s, \zeta) = p_k^+(s) e^{-s\zeta B_k}$$



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Граничные условия для потенциалов в образах Лапласа

Учитывая, что

$$[f(z)] \Big|_{z=h_{i-1}} = f(h_{i-1})_{i-1} - f(h_{i-1})_i$$

$$\mu = \rho c_{\perp}^2$$

Граничные условия в точках $z = h_i$
для образов Лапласа принимают вид:

$$[u_1] \Big|_{z=h_{i-1}} = -sG_{i-1} - \partial_z P_{i-1} + sG_i + \partial_z P_i = 0$$

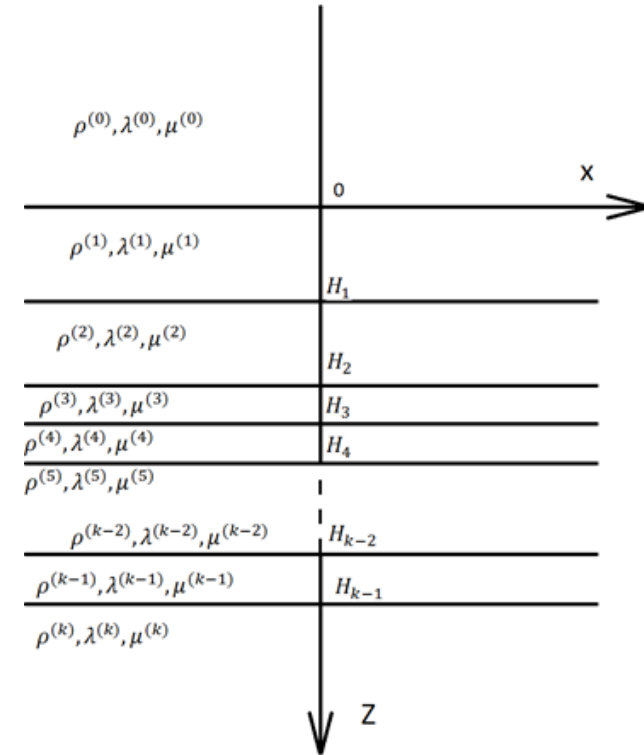
$$[u_3] \Big|_{z=h_{i-1}} = \partial_z G_{i-1} - sP_{i-1} - \partial_z G_i + sP_i = 0$$

$$[\sigma_{xz}] \Big|_{z=h_{i-1}} = -2\rho_{i-1}c_{\perp,i-1}^2 s \partial_{\zeta} G_{i-1} + \rho_{i-1}c_{\perp,i-1}^2 s^2 (1 - B_{i-1}^2) P_{i-1} +$$

$$+ 2\rho_i c_{\perp,i}^2 s \partial_{\zeta} G_i - \rho_i c_{\perp,i}^2 s^2 (1 - B_i^2) P_i = 0$$

$$[\sigma_{zz}] \Big|_{z=h_{i-1}} = -2\rho_{i-1}c_{\perp,i-1}^2 s \partial_{\zeta} P_{i-1} - \rho_{i-1}c_{\perp,i-1}^2 s^2 (1 - B_{i-1}^2) G_{i-1} +$$

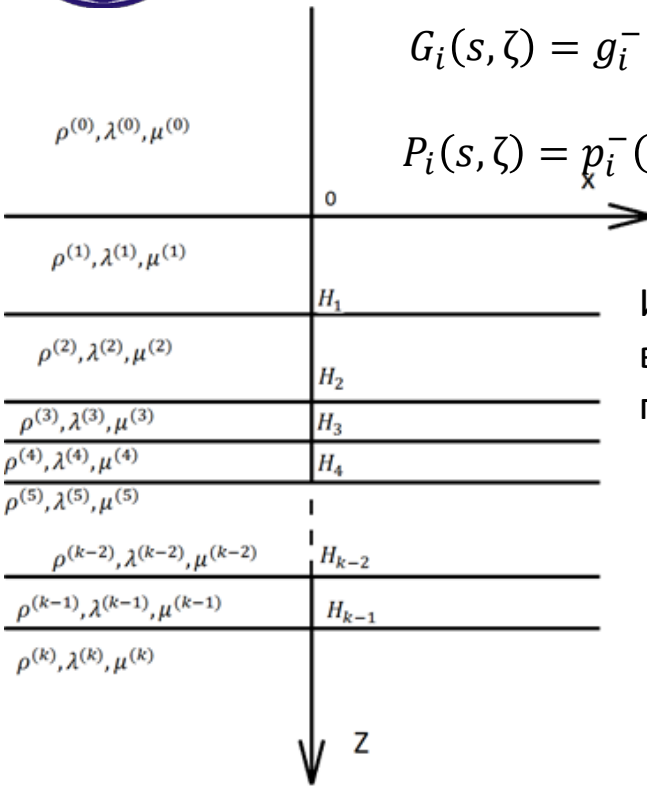
$$+ 2\rho_i c_{\perp,i}^2 s \partial_{\zeta} P_i + \rho_i c_{\perp,i}^2 s^2 (1 - B_i^2) G_i = 0$$



У Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Связь поля в верхнем полупространстве с полем в нижнем полупространстве



$$G_i(s, \zeta) = g_i^-(s)e^{s\zeta A_i} + g_i^+(s)e^{-s\zeta A_i}$$

$$P_i(s, \zeta) = p_i^-(s)e^{-s\zeta B_i} + p_i^+(s)e^{-s\zeta B_i}$$

Из граничных условий на
верхней и нижней границе
пачки слоев:

$$X_i = (g_i^-, p_i^-, g_i^+, p_i^+)^T$$

$$X_i = M_i X_{i-1}$$

Связь полей в верхнем и
нижнем полупространстве

$$X_i = M X_0$$

$$M = \prod_{i=1}^k M_i$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_k^+ \\ p_k^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0^- \\ p_0^- \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

В частности для амплитуд потенциалов
рассеянного вверх поля

$$\begin{pmatrix} g_0^- \\ p_0^- \end{pmatrix} = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} \frac{M_{13}M_{22} - M_{12}M_{23}}{M_{12}M_{21} - M_{11}M_{22}} \\ \frac{M_{13}M_{21} - M_{11}M_{23}}{M_{12}M_{21} - M_{11}M_{22}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{s} \begin{pmatrix} VP \\ VS \end{pmatrix}$$

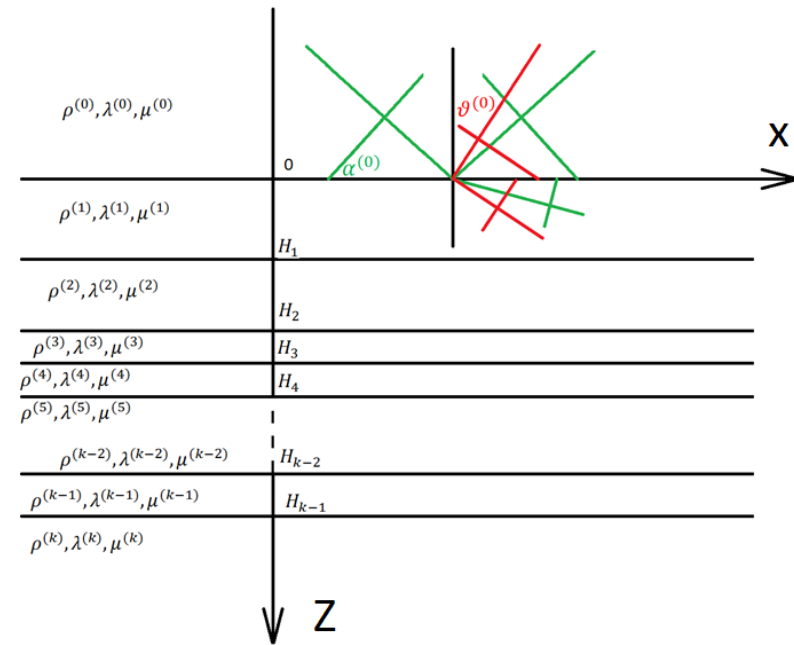
Вектор связи рассеянного пачкой
поля и падающей волной



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Рассеянное поле в потенциалах в неподвижной с.о.



$$\begin{pmatrix} \varphi^*(x, t, z) \\ \psi^*(x, t, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 H \left(-x + \frac{c_{\parallel 0}}{\sin(\alpha_0)} t + A_0 z \right) + \sum_{i=0}^n R_i H \left(-x + \frac{c_{\parallel 0}}{\sin(\alpha_0)} t + A_0 z - r_i \right) \\ K_0 H \left(-x + \frac{c_{\perp 0}}{\sin(\beta_0)} t + B_0 z \right) + \sum_{i=0}^n K_i H \left(-x + \frac{c_{\perp 0}}{\sin(\beta_0)} t + B_0 z - k_i \right) \end{pmatrix}$$

n, m – верхние пределы суммирования, определяются интенсивностью отражений и временем записи
 k_i, r_i – запаздывания рассеянных вверх волн



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Переход к смещениям в неподвижной с.о.

$$\vec{u}_{\parallel} = \vec{V} \otimes \int_0^t \varphi^*(x, z, c_{\parallel 0}t - t') \phi(x, z, t') dt' - \int_0^t \varphi^*(x, z, c_{\parallel 0}t - t') \vec{V} \otimes (\phi(x, z, t')) dt'$$

$$\vec{u}_{\perp} = \vec{L} \otimes \int_0^t \psi^*(x, z, c_{\parallel 0}t - t') \phi(x, z, t') dt' - \int_0^t \psi^*(x, z, c_{\parallel 0}t - t') \vec{L} \otimes (\phi(x, z, t')) dt'$$

$\phi(x, z, c_{\parallel 0}t)$ — профиль фронта падающей волны

Полученный результат в потенциалах является фундаментальным решением задачи о поиске рассеянного пачкой полного акустического поля

$$\vec{u}_{\parallel}^* = \vec{V} \varphi^*$$

$$\vec{u}_{\perp}^* = \vec{L} \psi^*$$

$$\vec{L} = -i \partial_z + \vec{k} \partial_x$$

$$\vec{u}_{\parallel}^* = -\vec{n}_{\parallel} \left(R_0 \delta(c_{\parallel 0}t - x \sin(\alpha_0) + \cos(\alpha_0)z) + \sum_{i=0}^m R_i \delta(c_{\parallel 0}t - x \sin(\alpha_0) + \cos(\alpha_0)z - \sin(\alpha_0)r_i) \right)$$

$$\vec{u}_{\perp}^* = -\vec{n}_{\perp} \left(K_0 \delta(c_{\perp 0}t - x \sin(\beta_0) + \cos(\beta_0)z) + \sum_{i=0}^n K_i \delta(c_{\perp 0}t - x \sin(\beta_0) + \cos(\beta_0)z - \sin(\beta_0)k_i) \right)$$

$$\vec{n}_{\parallel} = \sin(\alpha_0) \vec{l} + \cos(\alpha_0) \vec{k}$$

$$\vec{n}_{\perp} = \cos(\alpha_0) \vec{l} + \sin(\alpha_0) \vec{k}$$



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Результат проделанной работы

1. Получено фундаментальное решение для расчета полного акустического поля рассеянного слоистой упругой пачкой с плоскими горизонтальными слоями, с помощью свертки произвольного импульса с найденным решением дает точное решение задачи рассеяния импульса пачкой слоев.
2. Получено эталонное решение для плоских переходных волн, падающих в определенном ранее диапазоне углов падения. Для контроля вычислительных компьютерных экспериментов.



BalticPetroModel
2016

V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород



Спасибо за внимание



V Балтийская школа-семинар
Петрофизическое моделирование
осадочных пород