

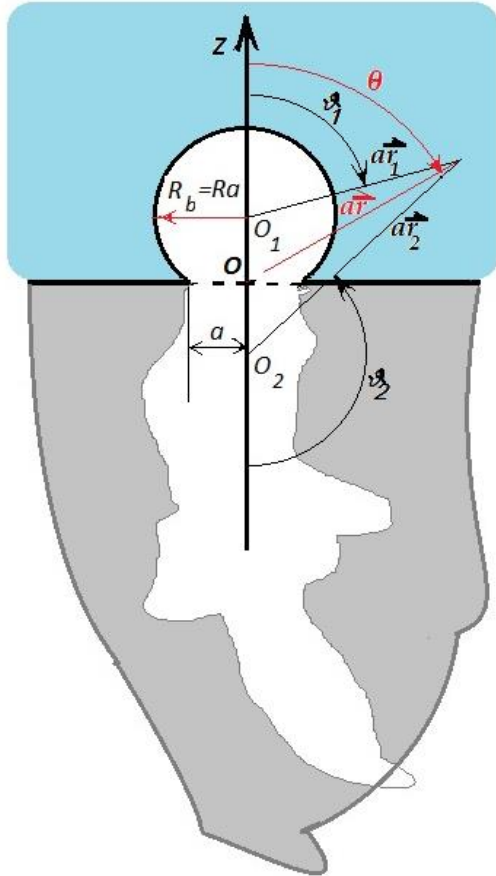
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПУЗЫРЬКА, ЗАКРЫВАЮЩЕГО КАВЕРНУ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ, ПОГРУЖЕННОМ В СМАЧИВАЮЩУЮ ЕГО ЖИДКОСТЬ, С АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНОЙ В ЖИДКОСТИ

Рок В.Е.

Московский филиал ФГУНПП «РОСГЕОЛФОНД» «ВНИИгеосистем»



Физическая постановка задачи



В случае заполненной газом каверны (трещины, поры) в твердой стенке, покрытой смачивающей её идеальной жидкостью, рассматривается задача о взаимодействии основной моды колебаний выпячивающегося в жидкость газового пузыря с акустическими колебаниями в жидкости.

Условия

1. Несжимаемая идеальная жидкость хорошо смачивает твердую поверхность.
2. Каверна заполнена газом, и над плоской границей «твердое тело/жидкость» выступает газовый «пузырек» с границей «газ/жидкость», на которой действует поверхностное натяжение σ .
3. Давление в жидкости может мало отличаться от давления p_0 вдали от пузырька на величину p_{ac} : $p_0 \gg p_{ac}$
4. Поверхность пузырька сохраняет форму близкую к сферической с радиусом кривизны $R_b(t)$, то есть $p_{ac} \ll 2\sigma/R_b$.

Математическая постановка задачи

Скорость движения жидкости в любой точке много меньше скорости звука и поэтому её плотность ρ можно считать постоянной, а скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и давление $p(\mathbf{r}, t)$ в жидкости подчиняются уравнениям

1. непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

и в отсутствии вязкости

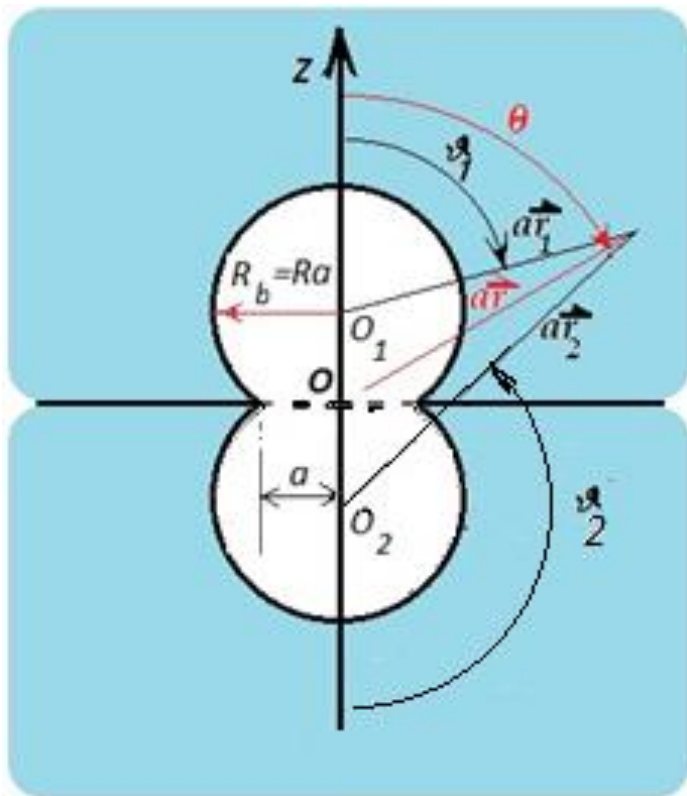
2. уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

На непроницаемой для жидкости границе твердого тела справедливо условие непротекания (ось Z перпендикулярна её плоскости с началом в т. O - центре устья каверны) и равенства нормальных к границе пузырька скоростей границы и жидкости ($\mathbf{n}(\mathbf{r}', t)$ - единичный вектор нормали к точке этой границы – сферы с центром O_1):

$$\text{а) } v_z = 0 \text{ при } z = 0, \quad \text{б) } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \dot{R}_b + \dot{Z} \cos \vartheta_1, \quad Z = OO_1 = \sqrt{R_b^2 - a^2}$$

Переформулировка задачи



Все длины в этой задаче удобно измерять радиусом линии контакта жидкости газа и твердого тела у устья каверны a , например,

$$R_b = aR, \dot{Z} = a\dot{R} \left(1 + \frac{R \cos \vartheta_1}{\sqrt{R^2 - 1}} \right).$$

Вместо исходной задачи можно рассмотреть задачу с жидкостью во всем пространстве, за исключением двух шаровых сегментов, заполненных газом: исходного «пузырька», покрывающего каверну с твердыми стенками, и его **зеркального отражения** относительно границы «жидкость/твердое тело». Условие *непротекания* (a) на плоскости $z=0$ будет автоматически удовлетворено.

Уравнение состояния газа при этом рассматривается с учетом объема газа внутри каверны.

Введем Φ – потенциал скорости жидкости: $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. В этой безграничной среде для Φ получим задачу Неймана с граничными условиями на поверхностях S «пузырьков»:

$$\Delta \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_S = a^2 \dot{R} \left(1 + \frac{R \cos \vartheta_i}{\sqrt{R^2 - 1}} \right), \quad \text{при } Z > 0 \ i = 1, \text{ при } Z < 0 \ i = 2.$$

Решение этой задачи в верхней полуплоскости - решение исходной задачи.

Решение задачи для потенциала скорости

Потенциал скорости выражается через фундаментальное решение для уравнения Лапласа

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}|_{S'} dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Благодаря осевой симметрии задачи интегрирование по азимутальному углу вокруг оси Z дает (в сферических координатах (r, Θ) с центром в т. O):

$$\Phi(r, \Theta) = \frac{a^2 R \dot{R}}{2\pi} I(r, \Theta; R),$$

$$I(r, \Theta; R) = \int_0^{\Theta_m} d\vartheta \sin \vartheta \left(1 + \frac{R \cos \vartheta}{\sqrt{R^2 - 1}} \right) \left\{ \frac{\mathbf{K}\left(\frac{2C}{A-B+C}\right)}{\sqrt{A-B+C}} + \frac{\mathbf{K}\left(-\frac{2C}{A-B-C}\right)}{\sqrt{A-B-C}} + \frac{\mathbf{K}\left(-\frac{2C}{A+B-C}\right)}{\sqrt{A+B-C}} + \frac{\mathbf{K}\left(\frac{2C}{A+B+C}\right)}{\sqrt{A+B+C}} \right\}$$

$$\mathbf{K}(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\eta}{\sqrt{1-m \sin^2 \eta}} - \text{полный эллиптический интеграл; } \sin \Theta_m = \frac{1}{R}, \cos \Theta_m = -\frac{\sqrt{R^2-1}}{R}$$

$$A(r, \Theta, \vartheta; R) = 2R^2 - 1 + r^2 + 2R\sqrt{R^2 - 1} \cos \vartheta, \quad B(r, \Theta, \vartheta; R) = 2r (\sqrt{R^2 - 1} + R \cos \vartheta) \cos \Theta,$$

$$C(r, \Theta, \vartheta; R) = 2r \cos \Theta \sin \vartheta$$

Вывод уравнения колебаний жидкости

Кинетическая энергия движения жидкости в исходной задаче (интеграл – только по поверхности S_1):

$$T = \frac{\rho a}{2} \int_{S_1} \Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} dS_1$$

Интегрирование удобно выполнить в сферической системе координат с центром в т. O_1 , в которой все точки поверхности S_1 находятся на расстоянии aR от центра и меняющиеся координаты – углы φ, Θ_1 , причем от полярного угла подынтегральные функции не зависят и интегрирование по нему дает 2π .

В оставшемся интеграле по полярному углу Θ_1 подынтегральные функции приводятся к нужному виду

заменой
$$r(\Theta_1, R) = \sqrt{2R^2 - 1 + 2R\sqrt{R^2 - 1} \cos \Theta_1}; \quad \Theta = \arcsin \left(\frac{R \sin \Theta_1}{r(\Theta_1, R)} \right)$$

Тогда $I(r(\Theta_1), \Theta(\Theta_1); R) = \tilde{I}(\Theta_1; R)$, $\tilde{\Phi}(\Theta_1; R) = \frac{a^2 \dot{R} R^2}{2\pi} \tilde{I}(\Theta_1; R)$ - потенциал скорости жидкости на стенке «пузырька» с текущим радиусом R , как функция полярного угла Θ_1 , и

$$T(R, \dot{R}) = \rho a^5 \dot{R}^2 R^3 F(R) \quad F(R) = \int_0^{\Theta_m} d\Theta_1 \sin \Theta_1 \left(1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - 1}} \cos \Theta_1 \right) \tilde{I}(\Theta_1; R)$$

Потенциальная энергия системы

$$U(R) = \sigma S_b(R) + \frac{const}{(\gamma-1)\Omega_g^{\gamma-1}},$$

при площади поверхности границы «жидкость/газ» $S_b = 2\pi a^2 R(R + \sqrt{R^2 - 1})$

И энергии газа внутри каверны и полости «пузырька» при политропном процессе в газе с показателем политропы γ , связывающим давление газа $p_g = p(R, t) + \frac{2\sigma}{aR}$ и его объем $\Omega_g = a^3\Omega_c + \Omega_b$:

$$p_g \Omega_g^\gamma = const$$

Ω_c - объем каверны, $\Omega_b = \frac{\pi}{3} a^3 (2R^3 + 2R^2 \sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - 1})$ - объем шарового сегмента «пузырька».

Единственная обобщенная координата исследуемой динамической системы – текущий радиус «пузырька» R , а единственная обобщенная скорость $\dot{R}$.

Лагранжиан системы:

$$L(R, \dot{R}) = T(R, \dot{R}) - U(R).$$

Условие Лагранжа его экстремума

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} - \frac{\partial L}{\partial R} = 0$$

Приводит к уравнению для R :

$$\ddot{R} + \dot{R}^2 \frac{1}{2 R^3 F(R)} \frac{d}{dR} (R^3 F(R)) - \frac{1}{2 \rho a^5 R^3 F(R)} \frac{dU}{dR} = 0$$

Его можно переписать в виде $R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{R}^2 R \frac{d \ln F(R)}{dR} = \frac{1}{2 \rho a^5 R^2 F(R)} \frac{dU}{dR}$

и сравнить с уравнением колебаний сферического пузырька в безграничной идеальной жидкости

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho a^2} (p(R) - p_\infty) \quad (\text{уравнение Рэлея-Плессета, Рэлей 1917 г.})$$

Следствия

1. Для малых колебаний можно определить их собственную частоту которая примерно в $\sim \sqrt{a^3 \Omega_c / \Omega_b}$ раз ниже собственной частоты свободно плавающего в безграничной жидкости сферического пузырька радиуса aR :

$$\omega_0 = \frac{3\gamma}{aR_0} \sqrt{\frac{p_g(R_0)}{\rho}}$$

2. В геологических условиях подобные явления могут наблюдаться при разномасштабной структуре флюидонасыщенных полостей в твердом скелете и акустических колебаниях, вызванных длинноволновыми волновыми процессами (с длиной волны $\lambda \gg a$).
4. Возможные комбинации жидкостей и газов, допускающие реализацию рассмотренной ситуации, предполагают докритическое состояние газа.
5. Понимание механизмов физических эффектов позволяет не только предсказать условия их проявления, но и управлять ими для получения нужного результата.

СПАСИБО!

